**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений**

## Оглавление

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений**
**9 КЛАСС**

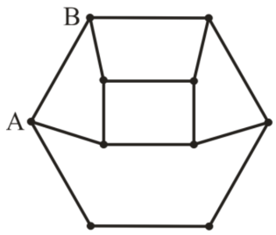
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

**1.** Лыжник спускается с вершины горы к её подножию за 10 минут, а сноубордист – за 5 минут. Спустившись, они тут же поднимаются вверх на подъёмнике, а затем сразу же спускаются вновь. В 12:00 они одновременно начали спуск с вершины. Впервые они встретились у подножия в 14:10. Определите время подъёма от подножия до вершины.

**2.** Решите уравнение $\left(x^2+3x-16\right)\left(x^2+7x-6\right)=41$.

**3.** Найдите натуральное число *n*, ближайшее к 1022, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 2*n*-1.

**4.** В пунктах А и В находится по автомобилю. Каждую минуту эти два автомобиля *одновременно* переезжают в какой-либо соседний пункт (пункты, соединённые отрезками, называют соседними). Докажите, что автомобили никогда не окажутся одновременно в одном пункте.




**5.** Найдите наименьшее отличное от полного квадрата натуральное число $N$ такое, что десятичная запись числа $\sqrt{N}$ имеет вид: $A{,}00a_1a_2\ldots a_n\ldots$, где $A$ – целая часть числа $\sqrt{N}$, $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ – цифры от 0 до 9.

**6.** Запишем подряд все натуральные числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, …

У каждого из этих чисел подсчитаем сумму цифр. В результате, получим последовательность:

9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, …

Найдите сумму первых 400 членов этой последовательности.

**7.** В окружность вписан равносторонний треугольник *ABC, M* – середина стороны *AB*, *N* – середина стороны *BC*. Докажите, что для любой точки *K*, лежащей на окружности, величина угла *MKN* не превосходит $60^0$.

**8.** Найдите три каких-нибудь натуральных числа *a*, *b*, *c*, удовлетворяющих равенству $a^3+b^{2016}=c^5$.

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений**

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1**

Обозначим время подъема от подножия до вершины горы через *x*. Из условий задачи следует, что впервые у подножия горы они встретились через 130 минут. Значит, впервые на вершине горы они встретятся через 130 + *x* минут. В таком случае *x* – это такое минимальное натуральное число, что (5+ *x*) - делитель (130 + *x*) и (10+ *x*) - делитель (130 + *x*). Перебором устанавливаем, что $x = 20$.

**Ответ**: 20.

**Задача 2**

Перемножаемые трехчлены имеют одинаковые дискриминанты. Значит, модуль разности корней первого трехчлена равен модулю разности корней второго. Это позволяет с успехом применить определенную «центрирующую» замену:

$$\left((x+1,5)^2-18,25\right)\left((x+3,5)^2-18,25\right)=41.$$

Замена $x=y-2,5$. Тогда

$$\left((y-1)^2-18,25\right)\left((y+1)^2-18,25\right)=41\Leftrightarrow\left(\left(y^2-17,25\right)-2y\right)\left(\left(y^2-17,25\right)+2y\right)=41\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2-17,25\right)^2-4y^2=41.$$

Получившееся биквадратное уравнение решается затем стандартным образом.

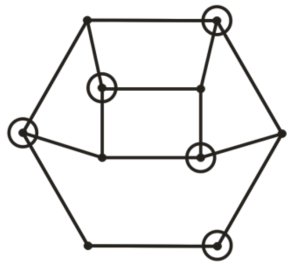
**Ответ**: $\dfrac{-5\pm\sqrt{77+4\sqrt{114}}}{2}$, $\dfrac{-5\pm\sqrt{77-4\sqrt{114}}}{2}$.

**Задача 3**

Сумма делителей числа $n=2^k$ равна $1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1=2n-1$. Ближайшее число вида $n=2^k$ к 1022 это 1024. Остаётся проверить, что для 1023 соответствующее равенство не выполняется.

**Ответ:** 1024.

**Задача 4**



Выделим некоторые вершины графа, обведя их в кружочек. Изначально, один из автомобилей находится в выделенной вершине, а второй нет. Из выделенной вершины можно попасть только в невыделенную и наоборот (двудольный граф). Поэтому в одной вершине автомобили оказаться не могут.

**Задача 5**

По условию существует натуральное *n* такое, что $n^2<N<(n+1)^2$. Следовательно, существует натуральное *a* такое, что $N=n^2+a,\ a\in(0;2n+1)$. Далее, $n^2<n^2+a<(n+1)^2\Leftrightarrow\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+a}<\sqrt{(n+1)^2}\Leftrightarrow 0<\sqrt{n^2+a}-n<1.$ Следовательно, дробная часть числа $\sqrt{N}$ равна $\sqrt{n^2+a}-n.$ Остается найти минимальное натуральное n, для которого существует натуральное $a \in (0;2n+1)$ такое, что

$$\sqrt{n^2+a}-n<\frac{1}{100}.$$

Отсюда $\sqrt{n^2+a}<\frac{1}{100}+n \Leftrightarrow a<\frac{1}{10^4}+\frac{n}{50}.$ Минимальное $n$ равно, очевидно, 50, и тогда $a=1.$ Следовательно, $N=n^2+a=2501.$

**Ответ**: 2501.

**Задача 6**

У натуральных чисел, кратных девяти, от 9 до 3600 надо подсчитать суммы цифр, а затем эти суммы сложить. Пусть $c_9$ – количество чисел в этом диапазоне, у которых сумма цифр равна 9, $c_{18}$ – количество чисел с суммой цифр 18, $c_{27}$ – количество чисел с суммой цифр 27.

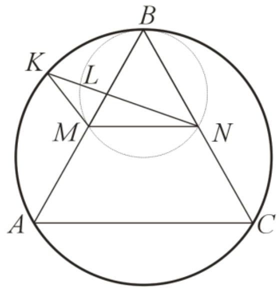
Вычислим $c_9$. Будем все числа трактовать как четырехзначные: 9=0009, 18=0018, … Рассмотрим сначала числа вида $0m_1m_2m_3$, т.е. те, у которых первая цифра ноль. Выясним, сколькими способами число 9 может быть представлено в виде суммы трех целых неотрицательных слагаемых: $9=m_1+m_2+m_3$. Прибавим к обеим частям число 3: $12=(m_1+1)+(m_2+1)+(m_3+1).$ Получается, что надо найти количество способов представить число 12 в виде суммы трех *натуральных* слагаемых. Это количество равно $C_{11}^2$. Действительно, представим себе на числовой прямой числа 1,2,…,12. Между ними имеется 11 промежутков. Выбрав два промежутка, мы разобьем 12 на три ненулевых слагаемых. Аналогично, имеется $C_{10}^2$ чисел с суммой цифр 9 вида $1m_1m_2m_3$, $C_9^2$ чисел $2m_1m_2m_3$ и, наконец, $C_8^2$ чисел $3m_1m_2m_3$. Заметим, что при подсчете количества чисел вида $3m_1m_2m_3$ выполняется равенство $6=m_1+m_2+m_3$, поэтому рассматриваемые числа $3m_1m_2m_3$ будут автоматически не больше, чем 3600. В итоге, $c_9=C_{11}^2+C_{10}^2+C_9^2+C_8^2=164.$

Затем непосредственным подсчетом находим $c_{27}=10,$ и, следовательно, $c_{18}=226.$ Для получения ответа остается вычислить $9c_9+18c_{18}+27c_{27}.$

**Ответ**: 5814.

**Задача 7**

Опишем окружность вокруг треугольника *BMN*. Она касается внутренним образом в точке *B* описанной около треугольника *ABC* окружности, поскольку точка *B* и центры окружностей лежат на одной прямой. Пусть сначала точка *K* лежит выше горизонтальной прямой *MN*. Пусть *L* – точка пересечения отрезка *KN* и меньшей окружности. Угол *MLN* равен $60^0$, и, следовательно, угол *KLM* равен $120^0$. Значит, угол *MKN* не превосходит $60^0$. Заметим, что в приведенном рассуждении не играет никакой роли то обстоятельство, что




точка *К* лежит на окружности. Важно лишь, что она находится выше прямой *MN* и вне окружности, описанной около треугольника *BMN*.

Пусть теперь точка *К* расположена ниже прямой *MN* (этот случай на рисунке не отражен). Рассмотрим точку $K_1$, симметричную точке *К* относительно прямой *MN*. Углы $MK_1N$ и *MKN*, очевидно, равны. Точка $K_1$ лежит выше прямой *MN* и вне меньшей окружности. По доказанному, угол $MK_1N$ не превосходит $60^0$. Утверждение доказано полностью.

**Задача 8**

Известно, что $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Поэтому числа $a, b, c$ будем искать в виде $a = 2^k, b = 2^l, c = 2^m$. Остается подобрать целые неотрицательные показатели $k, l, m$ так, чтобы выполнялись соотношения $3k = 2016l = 5m - 1$.

**Ответ**: например, $a = 2^{2688}, b = 2^4, c = 2^{1613}$.

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений**

**10 КЛАСС**

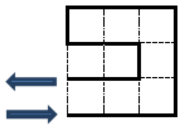
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

**1.** Лыжник спускается с вершины горы к её подножию за 9 минут, а сноубордист – за 7 минут. Спустившись, они тут же поднимаются вверх на подъёмнике, а затем сразу же спускаются вновь. В 12:00 они одновременно начали спуск с вершины. Впервые они встретились у подножия в 17:45. Определите время подъёма от подножия до вершины.

**2.** Решите уравнение $\left(x^2+3x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)=41$.

**3.** Найдите натуральное число *n*, ближайшее к 1022, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 2*n*-1.

**4.** На плоскости изображён квадрат *n*x*n* клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу (“тёплый пол”) так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход – в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток. На рисунке изображён пример укладки трубы в квадрате 3x3. Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечётном значении *n* и невозможно ни при каком чётном *n*.



**5.** Найдите наименьшее отличное от полного квадрата натуральное число *N* такое, что десятичная запись числа $\sqrt{N}$ имеет вид: $A{,}00a_1a_2\ldots a_n\ldots$, где *A* – целая часть числа $\sqrt{N}$, $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ – цифры от 0 до 9.

**6.** Докажите, что для любого прямоугольного треугольника с длинами катетов $a,b$, гипотенузой *c* и углами $\alpha$, $\beta$ ($\alpha$ напротив стороны *a*, $\beta$ – напротив *b*) выполняется равенство $a^2-2ac\cos(60^0+\beta)=b^2-2bc\cos(60^0+\alpha)$.

**7.** Запишем подряд все натуральные числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, …

У каждого из этих чисел подсчитаем сумму цифр. В результате получим последовательность:

9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, …

Найдите сумму первых 550 членов этой последовательности.

**8.** Найдите три каких-нибудь натуральных числа $a, b, c$, удовлетворяющих равенству $a^3+b^{2016}=c^5$.

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений**

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1**

Обозначим время подъема от подножия до вершины горы через *x*. Из условий задачи следует, что впервые у подножия горы они встретились через 345 минуты. Значит впервые на вершине горы они встретятся через 345 + *x* минут. В таком случае *x* – это такое минимальное натуральное число, что (7+ *x*) - делитель (345 + *x*) и (9+ *x*) - делитель (345+ *x*). Перебором устанавливаем, что $x = 19$.

**Ответ**: 19.

**Задача 2**

Перемножаемые трехчлены имеют одинаковые дискриминанты. Значит модуль разности корней первого трехчлена (хотя они и мнимые) равен модулю разности корней второго. Это позволяет с успехом применить определенную «центрирующую» замену:

$$\left((x+1,5)^2+3,75\right)\left((x+3,5)^2+3,75\right)=41.$$

Замена $x=y-2,5$. Тогда

$$\left((y-1)^2+3,75\right)\left((y+1)^2+3,75\right)=41 \Leftrightarrow \left(\left(y^2+4,75\right)-2y\right)\left(\left(y^2+4,75\right)+2y\right)=41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2+4,75\right)^2-4y^2=41.$$

Получившееся биквадратное уравнение решается затем стандартным образом.

**Ответ**: $\dfrac{-5\pm\sqrt{-11+4\sqrt{26}}}{2}$.

**Задача 3**

Сумма делителей числа $n=2^k$ равна $1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1=2n-1$. Ближайшее число вида $n=2^k$ к 1022 это 1024. Остаётся проверить, что для 1023 соответствующее равенство не выполняется.

**Ответ.** 512.

**Задача 4**

Если $n$ – нечётное, то, например, возможна укладка “змейкой” по аналогии с рисунком в условии задачи. Если $n$ – чётное, то количество узлов равно $(n+1)$х$(n+1)$ – нечётное число. Раскрасим узлы в черный белый цвет так, чтобы соседние узлы имели разные цвета. Тогда маршрут начинается узлом оного цвета, а заканчивается узлом другого цвета. Но тогда такой маршрут имеет чётную длину (количество пройденных узлов). Следовательно, невозможно построить соответствующий маршрут.

**Задача 5**

По условию существует натуральное $n$ такое, что $n^2<N<(n+1)^2$. Следовательно, существует натуральное $a$ такое, что $N=n^2+a,\ a\in(0;2n+1)$. Далее,

$n^2 < n^2 + a < (n+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+a} < \sqrt{(n+1)^2} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{n^2+a} - n < 1.$ Следовательно, дробная часть числа $\sqrt{N}$ равна $\sqrt{n^2+a}-n.$ Остается найти минимальное натуральное n, для которого существует натуральное $a \in (0; 2n+1)$ такое, что

$$\sqrt{n^2+a}-n < \frac{1}{100}.$$

Отсюда $\sqrt{n^2+a} < \frac{1}{100} + n \Leftrightarrow a < \frac{1}{10^4} + \frac{n}{50}.$ Минимальное $n$ равно, очевидно, 50, и тогда $a = 1.$ Следовательно, $N = n^2 + a = 2501.$

**Ответ**: 2501.

**Задача 6**

Преобразуем косинус суммы двух углов:

$$a^2 - ac\left(\cos\beta - \sqrt{3}\sin\beta\right) = b^2 - bc\left(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha\right).$$

Слагаемые $\sqrt{3}ac\sin\beta$ и $\sqrt{3}bc\sin\alpha$ равны друг другу (т.к. оба равны удвоенной площади треугольника, умноженной на $\sqrt{3}$) и, следовательно, сокращаются. Остается доказать, что

$$a^2 - ac\cos\beta = b^2 - bc\cos\alpha.$$

Последнее очевидно, поскольку $c\cos\beta = a$ и $c\cos\alpha = b.$ Равенство доказано.

**Задача 7**

У натуральных чисел, кратных девяти, от 9 до 4950 надо подсчитать суммы цифр, а затем эти суммы сложить. Пусть $c_9$ – количество чисел в этом диапазоне, у которых сумма цифр равна 9, $c_{18}$ – количество чисел с суммой цифр 18, $c_{27}$ – количество чисел с суммой цифр 27.

Вычислим $c_9$. Будем все числа трактовать как четырехзначные: 9=0009, 18=0018, … Рассмотрим сначала числа вида $0m_1m_2m_3$, т.е. те, у которых первая цифра ноль. Выясним, сколькими способами число 9 может быть представлено в виде суммы трех целых неотрицательных слагаемых: $9 = m_1 + m_2 + m_3$. Прибавим к обеим частям число 3: $12 = (m_1+1) + (m_2+1) + (m_3+1)$. Получается, что надо найти количество способов представить число 12 в виде суммы трех *натуральных* слагаемых. Это количество равно $C_{11}^2$. Действительно, представим себе на числовой прямой числа 1,2,…,12. Между ними имеется 11 промежутков. Выбрав два промежутка, мы разобьем 12 на три ненулевых слагаемых. Аналогично, имеется $C_{10}^2$ чисел с суммой цифр 9 вида $1m_1m_2m_3$, $C_9^2$ чисел $2m_1m_2m_3$, $C_8^2$ чисел $3m_1m_2m_3$, и, наконец, $C_7^2$ чисел вида $4m_1m_2m_3$. В итоге, $c_9 = C_{11}^2 + C_{10}^2 + C_9^2 + C_8^2 + C_7^2 = 185.$

Затем нетрудно найти, что $c_{27} = 30,$ и, следовательно, $c_{18} = 335.$ Для получения ответа остается вычислить $9c_9 + 18c_{18} + 27c_{27}.$

**Ответ**: 8505.

**Задача 8**

Известно, что $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Поэтому числа $a, b, c$ будем искать в виде $a = 2^k, b = 2^l, c = 2^m$. Остается подобрать целые неотрицательные показатели $k, l, m$ так, чтобы выполнялись соотношения $3k = 2016l = 5m - 1$.

**Ответ**: например, $a = 2^{2688}, b = 2^4, c = 2^{1613}$.

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений**

**11 КЛАСС**

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

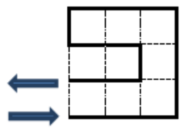
**1.** Найдите какое-нибудь натуральное число, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 2016.

**2.** Решите уравнение $\left(x^2+3x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)=41$.

**3.** Докажите, что для любого треугольника с длинами сторон *a, b, c* и углами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ($\alpha$ напротив стороны *a*, $\beta$ – напротив *b*, $\gamma$ – напротив *c*) выполняются равенства $a^2+b^2-2ab\cos(60^0+\gamma)=b^2+c^2-2bc\cos(60^0+\alpha)=a^2+c^2-2ab\cos(60^0+\beta)$.

**4.** Две частицы находятся в вершинах правильного 2016-угольника. В начальный момент первая частица находится на расстоянии 45 сторон по часовой стрелке от второй. Затем одновременно они начинают совершать прыжки: вторая – против часовой стрелки через 100 сторон, а первая – по часовой стрелке через 83 стороны. Попадут ли они одновременно в одну вершину и если да, то через сколько прыжков?

**5.** На плоскости изображён квадрат *n*x*n* клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу (“тёплый пол”) так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход – в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток. На рисунке изображён пример укладки трубы в квадрате 3x3. Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечётном значении *n* и невозможно ни при каком чётном *n*.



**6.** Первый спортсмен начинает движение из пункта А в пункт В, держа в руке эстафетную палочку. Одновременно с ним из пункта В стартует второй спортсмен и совершает челночный бег между пунктами А и В со скоростью, в 10 раз большей, чем скорость первого спортсмена (т.е., добежав до А, второй спортсмен тут же разворачивается и бежит в В, оттуда снова в А и т.д.). При каждой встрече спортсмен, владеющий эстафетной палочкой, передает её другому спортсмену. Найти путь, который будет проделан эстафетной палочкой к тому моменту, когда первый спортсмен окажется в пункте В, если расстояние между пунктами А и В равно S.

**7.** Пусть *x* – действительное число. Обозначим символом $\|x\|$ расстояние на числовой прямой от *x* до ближайшего целого числа. (Например, $\|3,7\|=0,3.$) Докажите, что найдётся натуральное число *k* такое, что 1) $k\le 999$ и 2) $\left\|k\cdot\sqrt{2}\right\|<\frac{1}{1000}$.

**8.** Найдите все пары натуральных чисел (*x*, *y*), удовлетворяющих равенству:

$$x^2+y^2=100000.$$

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений**

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1**

Сумма делителей числа $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ равна

$$\left(1+p_1+p_1^2+\dots p_1^{k_1}\right)\cdot\left(1+p_2+p_2^2+\dots p_2^{k_2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+p_s+p_s^2+\dots p_s^{k_s}\right),$$

где $p_i$ - простые числа. Разложим число 2016 на простые множители: $2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$ Тогда произведение чисел $2\cdot 3^2 = 18$, $2\cdot 7 = 14$ и $2^3 = 8$ равно 2016 и при этом эти числа могут быть представлены: $18 = 1+17$, $14 = 1+13$ и $8 = 1+7$.

**Ответ:** 17·13· 7=1547 (один из возможных ответов).

**Задача 2**

Перемножаемые трехчлены имеют одинаковые дискриминанты. Значит модуль разности корней первого трехчлена (хотя они и мнимые) равен модулю разности корней второго. Это позволяет с успехом применить определенную «центрирующую» замену:

$$\left((x+1,5)^2+3,75\right)\left((x+3,5)^2+3,75\right)=41.$$

Замена $x = y-2,5$. Тогда

$$\left((y-1)^2+3,75\right)\left((y+1)^2+3,75\right)=41 \Leftrightarrow \left(\left(y^2+4,75\right)-2y\right)\left(\left(y^2+4,75\right)+2y\right)=41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2+4,75\right)^2-4y^2=41.$$

Получившееся биквадратное уравнение решается затем стандартным образом.

**Ответ**: $\dfrac{-5\pm\sqrt{-11+4\sqrt{26}}}{2}$.

**Задача 3**

Докажем первое равенство

$$a^2+b^2-2ab\cos(60^0+\gamma)=b^2+c^2-2bc\cos(60^0+\alpha).$$

Преобразуем косинус суммы

$$a^2+b^2-ab\left(\cos\gamma-\sqrt{3}\sin\gamma\right)=b^2+c^2-bc\left(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\right).$$

Слагаемые $\sqrt{3}ab\sin\gamma$ и $\sqrt{3}bc\sin\alpha$ равны друг другу (т.к. оба равны удвоенной площади треугольника, умноженной на $\sqrt{3}$) и, следовательно, сокращаются. Остается доказать, что

$$a^2-ab\cos\gamma=c^2-bc\cos\alpha.$$

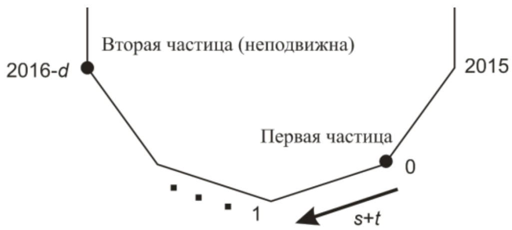
Последнее очевидно, поскольку, по теореме косинусов,

$$2ab\cos\gamma=a^2+b^2-c^2 \text{ и } 2bc\cos\alpha=c^2+b^2-a^2.$$

Первое равенство доказано. Второе доказывается аналогично.

**Задача 4**

Пусть первая частица прыгает через *s* сторон по часовой стрелке, вторая – через *t* сторон против часовой стрелки. Первоначально первая частица находится на расстоянии *d* сторон по часовой стрелке от второй. Перейдем в систему отсчета, связанную со второй частицей. То есть, вторая частица неподвижна, а первая совершает прыжки через *s*+*t* ребер по часовой стрелки. Заметим, что расстояние между частицами, отсчитываемое по часовой стрелке от первой ко второй, составляет 2016-$d$ сторон. Занумеруем вершины многоугольника целыми числами от 0 до 2015 таким образом, что первоначально первая частица находится в вершине с номером 0, а вторая – в вершине с номером 2016-$d$. Пусть $n$ – искомое количество прыжков. Тогда, чтобы первая частица попала в вершину 2016-$d$, должно выполняться соотношение




$$n(s+t) \equiv 2016-d\,(\operatorname{mod} 2016) \Leftrightarrow \exists k \in N : n(s+t)+d = 2016k.$$

Итак, надо найти натуральное $n$, для которого существует натуральное $k$ такое, что $n = \dfrac{2016k-d}{s+t} = \dfrac{2016k-45}{183}$. Число 2016 дает остаток 3 при делении на 183. Следовательно, чтобы числитель давал остаток ноль при делении на 183, достаточно взять $k$=15. Тогда $n$=165.

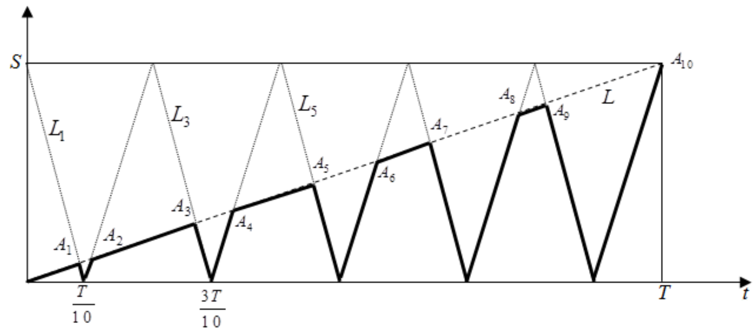
**Ответ**: 165.

## Задача 5

Если $n$ – нечётное, то, например, возможна укладка “змейкой” по аналогии с рисунком в условии задачи. Если $n$ – чётное, то количество узлов равно ($n+1$)x($n+1$) – нечётное число. Раскрасим узлы в черный белый цвет так, чтобы соседние узлы имели разные цвета. Тогда маршрут начинается узлом оного цвета, а заканчивается узлом другого цвета. Но тогда такой маршрут имеет чётную длину (количество пройденных узлов). Следовательно, невозможно построить соответствующий маршрут.

## Задача 6

Нарисуем график зависимости от времени координат спортсменов относительно пункта А, затем выделим те части прямых, когда соответствующий спортсмен владел эстафетной палочкой. Прямую для первого спортсмена обозначим как $L$, участки прямых для второго спортсмена – как $L_1, ..., L_{10}$. Точки передачи эстафетной палочки (они же точки пересечения соответствующих прямых) обозначим как $A_1, ..., A_{10}$. Тогда искомая величина $S_0$ представляет собой сумму проекций выделенных фрагментов на ось ординат, а именно:




$$S_0 = y(A_1)+y(A_1)+y(A_2)+\left[y(A_3)-y(A_2)\right]+y(A_3)+$$

$$+y(A_4)+\left[y(A_5)-y(A_4)\right]+...+y(A_9)+y(A_{10}) =$$

$$= 2\left[y(A_1)+y(A_3)+y(A_5)+y(A_7)+y(A_9)\right]+S$$

Уравнение прямой $L$ имеет вид $y=\frac{S}{T}x$. Уравнение прямой $L_1$ имеет вид $y=-\frac{10S}{T}x+S$ (его можно найти, например, подставив в уравнение прямой $y=kx+b$ координаты двух крайних точек отрезка и решив систему относительно $k$ и $b$). Составив систему из уравнений для прямых $L$ и $L_1$, найдем ординату точки $A_1$

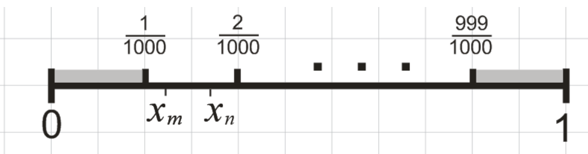
$$\begin{cases} y=\frac{S}{T}x \\ y=-\frac{10S}{T}x+S \end{cases} \Rightarrow \quad y(A_1)=\frac{S}{11}.$$

Аналогично получаем $y(A_1)=\frac{3S}{11}$. Нетрудно увидеть, что для всех интересующих нас точек $y(A_{2n+1})=\frac{(2n+1)S}{11}$. Поэтому $S_0=2\cdot\frac{S}{11}(1+3+5+7+9)+S=\frac{61}{11}S$.

**Ответ**: $\frac{61}{11}S$.

**Задача 7**

Разобьем отрезок от 0 до 1 на 1000 одинаковых подотрезков и отметим на нем точки $x_1=\{1\cdot\sqrt{2}\},\ x_2=\{2\cdot\sqrt{2}\},\ldots,\ x_{999}=\{999\cdot\sqrt{2}\}$. Здесь фигурные скобки { } обозначают дробную часть числа. В силу того, что число $\sqrt{2}$ иррационально, ни одна точка $x_i$ не может совпасть с концом подотрезка. Ясно также, что если хоть одна из этих точек попала на подотрезок, отмеченный серым, то наше утверждение доказано. Поэтому предположим, что ни одна точка на эти крайние подотрезки не попала. Тогда получается, что наши 999 точек должны разместиться на 998 оставшихся подотрезках. Значит, существует хотя бы один подотрезок, внутрь которого попадут по крайней мере две точки $x_m$ и $x_n$, $m>n$. Тогда $\|(m-n)\cdot\sqrt{2}\|<\frac{1}{1000}$.




Утверждение доказано.

**Задача 8**

Равенство $x^2+y^2=100000$ перепишем в виде

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=10,$$

где $z=100$. Обозначив еще $p=x/z,\ q=y/z,$ получим уравнение

$$p^2+q^2=10,\quad p,q\in\mathbf{Q}. \qquad (1)$$

Задача сведена, таким образом, к поиску точек с положительными рациональными координатами (со знаменателем 100) на окружности радиуса $\sqrt{10}$, с центром в начале координат. Уравнению (1) удовлетворяют, например, числа $p_0 = 3, q_0 = 1.$ Остальные рациональные точки будем искать следующим образом: через точку с координатами $p_0 = 3,\ q_0 = 1$ будем проводить всевозможные прямые

$$p = k(q - q_0) + p_0, \qquad (2)$$

а коэффициент $k$ подбирать так, чтобы точка пересечения прямой (2) и окружности (1) (отличная от $p_0 = 3, q_0 = 1$) имела рациональные координаты. Подставив (2) в (1), получим

$$\left(k\left(q-1\right)+3\right)^2 + q^2 = 10 \Leftrightarrow k^2\left(q-1\right)^2 + 6k\left(q-1\right) + q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{сокращаем на } q-1) \Leftrightarrow k^2(q-1) + 6k + q + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{k^2 - 6k - 1}{1 + k^2}.$$

Подставляя полученное выражение для $q$ в (2), найдем

$$p = \frac{-3k^2 - 2k + 3}{1 + k^2}.$$

Поскольку $p_0, q_0$ рациональны, а в точке пересечения рациональными должны быть еще и $p,\ q,$ то, как следует из (2), коэффициент $k$ также рационален. Полагая $k = m/n,\ m, n \in \mathbf{Z},$ выражения для $p$ и $q$ перепишем в виде

$$p = \frac{3\left(n^2 - m^2\right) - 2mn}{n^2 + m^2}, \qquad q = \frac{m^2 - 6mn - n^2}{n^2 + m^2}.$$

Таким образом, искомые числа равны

$$x = 3\left(n^2 - m^2\right) - 2mn, \qquad y = m^2 - 6mn - n^2, \text{ где } m^2 + n^2 = 100.$$

Последнее уравнение решается перебором:

$\left(|m| = 10, |n| = 0\right)$, $\left(|m| = 0, |n| = 10\right)$, $\left(|m| = 8, |n| = 6\right)$, $\left(|m| = 6, |n| = 8\right)$. Для найденных $m, n$ (а также с учетом отмеченного ранее решения $p_0 = 3, q_0 = 1$) получаем следующие пары натуральных чисел $(x, y)$:

**Ответ**: (12, 316), (100, 300), (180, 260), (260, 180), (300, 100), (316, 12).

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений**

## ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

### 9 КЛАСС

**1.** Некоторая функция $f$ удовлетворяет свойству: $\forall x>0 \quad 2f(x)+f(1/x)=1$. Найдите $3\cdot f(20152016)$.

**Ответ**: 1.

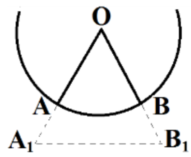
**2.** Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 53 включительно и записал в тетрадь ответ:

42748832840600255642980137533893996496903437883668137246x2000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру.

**Ответ:** 7.

**3.** Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен $60^0$. Длины радиусов OA и OB увеличили на 4%, в результате они превратились в отрезки $OA_1$ и $OB_1$. Найдите отношение длины отрезка $A_1B_1$ к длине дуги AB. В качестве ответа укажите получившееся отношение, умноженное на $\pi$. (Длина окружности радиуса $R$ равна $2\pi R$). (Ответ дайте в виде десятичной дроби, например, 14.7)




**Ответ:** 3.12.

**4.** Уравнения $x^4+2x^3-2x^2-3x-4=0$ и $x^4+3x^3-6x-8=0$ имеют два общих корня. Найдите их сумму.

**Ответ:** -1.

**5.** Сколько существует пар натуральных чисел $(a,b)$, $1\le a\le 10, 1\le b\le 10, a>b$, для которых число $a^{2015}-b^{2015}$ делится нацело на число $a+b$?

**Ответ:** 3.

**6.** Числа $a, b$ удовлетворяют равенствам $a^3+3a^2+6a=-7$ и $b^3+3b^2+6b=-1$. Найдите $a+b$.

**Ответ:** -2.

### 10 КЛАСС

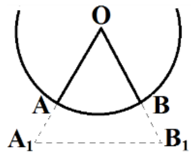
**1.** Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 53 включительно и записал в тетрадь ответ:

42748832840600255642980137533893996496903437883668137246x2000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру.

**Ответ:** 7 .

**2.** Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен $60^0$. Длины радиусов OA и OB увеличили на 4%, в результате они превратились в отрезки $OA_1$ и $OB_1$. Найдите отношение длины отрезка $A_1B_1$ к длине дуги AB. В качестве ответа укажите получившееся отношение, умноженное на $\pi$. (Длина окружности радиуса $R$ равна $2\pi R$). (Ответ дайте в виде десятичной дроби, например, 14.7)




**Ответ:** 3.12.

**3.** Уравнения $x^4+2x^3-2x^2-3x-4=0$ и $x^4+3x^3-6x-8=0$ имеют два общих корня. Найдите их сумму.

**Ответ:** -1.

**4.** В классе 10 учеников. Из них требуется сформировать две команды (одну для уборки актового зала, вторую – для работы на пришкольном участке). При этом: 1) количество людей в командах может быть различным (но отличным от нуля), 2) каждый ученик может быть членом только одной команды или не входить в эти команды вовсе. Сколькими способами это можно сделать? (Ответ дать в виде натурального числа)

**Ответ:** 57002.

**5.** Найдите значение выражения $2\cdot(a^4+b^4+c^4)$, если известно, что числа $a,b,c$ удовлетворяют соотношениям: $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ a^3+b^3+c^3=19. \end{cases}$

**Ответ:** 81.

**6.** Найдите наименьшее натуральное число $n$ такое, что $n>2015$ и $\left[\sqrt{9n+2}\right]\neq\left[\sqrt{9n+4}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа $x$ называется наибольшее целое число, не превосходящее $x$. Например, [3,7]=3.)

**Ответ:** 2085.

## 11 КЛАСС

**1.** Уравнения $x^5-3x^3+2x^2+x^4-3x-4=0$ и $x^5-2x^3+4x^2+x^4-6x-8=0$ имеют два общих корня. Найдите их сумму.

**Ответ:** $-1$.

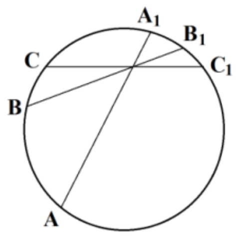
**2.** Найдите наименьшее натуральное $n$такое, что $n>2015$ и $\left[\sqrt{9n+5}\right]\neq\left[\sqrt{9n+7}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа $x$ называется наибольшее целое число, не превосходящее $x$. Например, [3,7]=3.)

**Ответ:** 2146.

**3.** Найдите значение выражения $a^4+b^4+c^4$, если известно, что числа $a,b,c$ удовлетворяют соотношениям: $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=8 \\ a^3+b^3+c^3=19. \end{cases}$

**Ответ:** 48.

**4.** В окружности три хорды $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке. Угловые меры дуг $AC_1, AB, BC, A_1B_1$ равны соответственно $150^0, 30^0, 30^0, 30^0$. Найдите угловую меру дуги $B_1C_1$. Ответ укажите в градусах.




**Ответ:** 60.

**5.** Пусть $f(x)=x^3-x+12$. Найдите все возможные натуральные числа, которые могут быть общими делителями чисел $m$ и $f(m)$, где $m$ – натуральное число (например, у чисел 4 и 6 общие делители – 1 и 2). В ответе укажите их сумму.

**Ответ**: 28.

**6.** На листе выписаны подряд 1000 чисел: 1,2,3,4, …, 999, 1000. В этом ряду вычеркнули числа через одну, начиная с первой (то есть, вычеркнули: 1,3,5, …, 999). С оставшимися числами 2,4,6, …, 1000 проделали такое же действие вычеркнули числа через одну, начиная с первой. Далее повторили такую процедуру сколько возможно. Какое число вычеркнуто последним?

**Ответ:** 512.